ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.

ЗАДАНИЕ: вычислить таблицы значений и построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений u поперечных сечений прямого бруса (рис. 1).

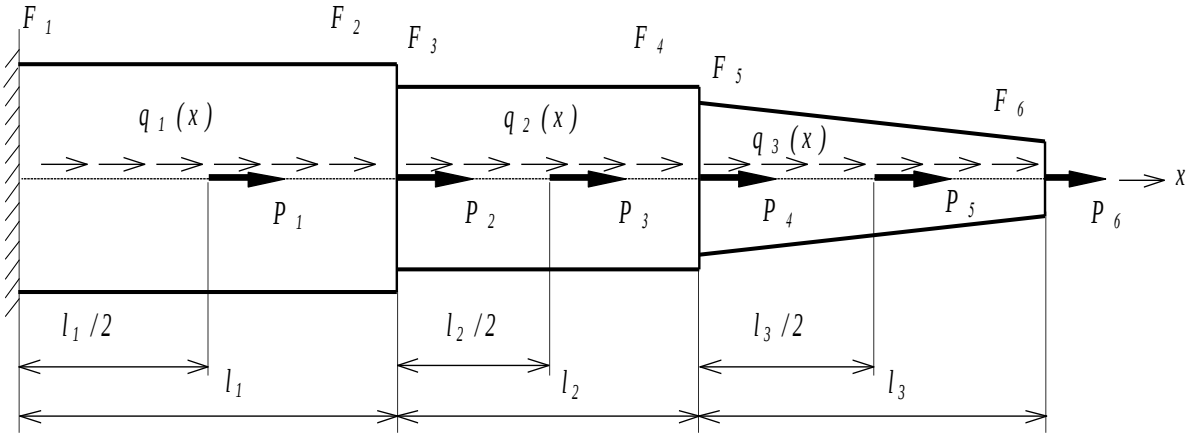


Рис. 1

Геометрически брус можно разделить на три участка. На i-ом участке (i =1, 2, 3) длиной l_i заданы F_{2i+1} , F_{2i} - площади левого и правого сечений участка бруса (на каждом участке принят линейный закон измененения площади по длине); P_{2i+1} , P_{2i} - сосредоточенные силы, приложенные в соответствии со схемой (рис. 1); $q_i\,(x)$ - продольная распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (заданы k_i - тангенс наклона в уравнении прямой и b_i - значение q_i на левой границе участка).

Для вычисления значений N, σ, u необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$N(x) = \int_{x}^{l_1+l_2+l_3} q(x)dx + \sum P_j \qquad (1)$$

В сумме (1) учитываются все сосредоточенные силы, приложенные на участке от x до $l_1+l_2+l_3$.

$$\sigma(x) = N(x) / F(x) \qquad (2)$$

$$u\,(x) = \frac{1}{E}\int_{0}^{x} \sigma\,(x)d\,x \qquad (3)$$

Для решения задачи требуется разбить брус на m силовых участков (в общем случае m = 6) и на каждом участке силовом вычислить требуемые величины. Решение представить в виде таблицы и эпюр. На каждом силовом участке рассчитать не менее трех точек.

Для определения варианта задания порядковый номер по групповому журналу перевести в двоичный код и дополнить нулями до 6-ти позиций (например №3=000011). В зависимости от значений в каждой позиции (0 или 1) по таблице определить исходные данные. (E=1.1·10 ^{8} кН / м ^{2})

№ позиции	1-ая			2-ая			3-ья		
значения	l_1	$F_1 \cdot 10^4$	$F_2 \cdot 10^4$	l_2	$F_3 \cdot 10^4$	$F_4 \cdot 10^4$	l_3	$F_5 \cdot 10^4$	$F_6 \cdot 10^4$
в позиции	м	$м^2$	$м^2$	м	$м^2$	$м^2$	м	$м^2$	$м^2$
0	0.5	5	3	0.4	4	3	0.5	3	3
1	0.3	4	4	0.7	5	3	0.4	4	2

№ позиции	4-ая				5-ая				6-ая			
значения	P_1	P_2	k_1	b_1	P_3	P_4	k_2	b_2	P_5	P_6	k_3	b_3
в позиции	кН	кН	кН/$м^2$	кН/м	кН	кН	кН/$м^2$	кН/м	кН	кН	кН/$м^2$	кН/м
0	0	10	5	2	0	-5	-4	-4	0	20	-5	-3
1	10	-10	0	0	-10	20	0	5	15	-5	0	0

При решении задачи возможны многие варианты программ. Рассмотрим на примере упрощенной схемы бруса (рис. 2) алгоритм одного из них.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

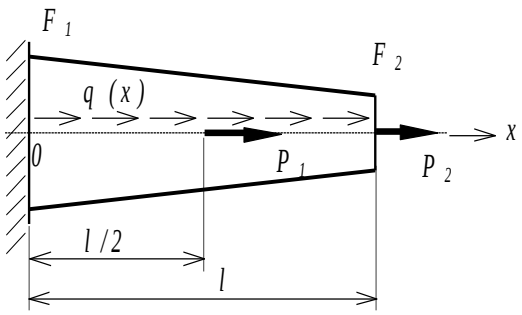


Рис. 2

Исходные данные: l = 1м , F_1= $4 \cdot 10^{-4}$ $м^2$, F_2 = $2 \cdot 10^{-4}$ $м^2$, P_1 = 10 Кн , P_2 = -20 Кн , k = 5 Кн / $м^2$, b = -5 Кн / м .

Уравнение изменения площади поперечного сечения бруса F(x) запишется в виде

$$F(x) = -2 \cdot 10^{-4} x + 4 \cdot 10^{-4}$$

Закон изменения распределенной нагрузки

$$q(x) = 5x - 5$$

Так как при $x = l / 2$ в точке приложения силы P_1 продольная сила N терпит разрыв, брус необходимо разбить на два силовых участка: 1-ый участок $0 < x < l / 2$; 2-ой участок $l / 2 < x < l$. При этом в точке $x = l / 2$ величины N и σ необходимо вычислить дважды: слева и справа от точки.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ.

Введем в рассмотрение массив $X(6)$, элементы которого числено равны координатам точек в которых вычисляются N , σ , u . При трех точках на каждом участке и равномерной сетке получим:

$$x_1 = 0,\ x_2 = l / 4,\ x_3 = l / 2,\ x_4 = l / 2,\ x_5 = 3l / 4,\ x_6 = l .$$

Для вычислений и хранения усилий, напряжений и перемещений в точках x_i , будем использовать массивы $N(6)$, $\sigma(6)$, $u(6)$.

Вычисление усилий методом сечений удобно начинать со свободного конца бруса. Из расчетной схемы видно, что

$$N_6 = P_2 .$$

Для N_5 из (1) имеем:

$$N_5 = N_6 + \int_{x_5}^{x_6} q(x)dx$$

Вычисляя последний интеграл по формулам трапеций с использованием значений функции $q(x)$ только на концах отрезка интегрирования (т. к. $q(x)$ - линейная функция, то результат будет точным), получим

$$N_5 = N_6 + [q(x_6) + q(x_5)]\, h / 2$$

где $h = x_6 - x_5$ - шаг интегрирования. В рассматриваемом случае для равномерности сетки независимо от пределов интегрирования шаг постоянен и равен $h = l / 4$.

Для N_4 аналогично получим формулу

$$N_4 = N_5 + [q(x_5) + q(x_4)]\, l / 8$$

В точке разрыва имеем: $N_3 = N_4 + P_1$

и далее: $N_2 = N_3 + [q(x_3) + q(x_2)]\, l / 8$

$$N_1 = N_2 + [q(x_2) + q(x_1)]\, l / 8$$

Если увеличить длину массива N на единицу и ввести значение $N_7 = 0$, то вместо $N_6 = P_2$ получим $N_6 = N_7 + P_2$.

Тогда можно независимо от количества силовых участков и точек разбиения внутри участков записать следующие рекуррентные формулы для определения усилий в поперечных сечениях бруса:

$N_{m \cdot k+1} = 0$ - значение усилий за пределом бруса;

$N_{j \cdot k} = N_{j \cdot k+1} + P_j$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-ый стык (стык j-го и j+1 -го силовых участков);

$N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h / 2$, $i = j \cdot k + 1, \ldots, (j - 1) \cdot k + 1$ - для точек внутри j-го силового участка.

Здесь: m - число участков; k - количество точек на участке; h - шаг разбиения. Если при разбиении используется неравномерная сетка, то $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Зная усилия и напряжения (последние определяются в соответствии с формулой (2)), можно вычислить перемещения в контрольных точках по формуле (3). При интегрировании по формуле трапеций (в данном случае это приводит к определенной ошибке) получим:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u_1 + [\sigma_1 + \sigma_2]\, l / (8E), \quad u_3 = u_2 + [\sigma_2 + \sigma_3]\, l / (8E)$$

$$u_4 = u_3, \quad u_5 = u_4 + [\sigma_4 + \sigma_5]\, l / (8E), \quad u_6 = u_5 + [\sigma_5 + \sigma_6]\, l / (8E)$$

или в общем случае:

$u_1 = 0$, - в начале отрезка;

$u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h / (2E)$, i от $(j - 1) \cdot k + 2$ до $j \cdot k$ с шагом 1- внутри j-го участка; (6)

$u_{j \cdot k+1} = u_{j \cdot k}$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-й стык . (7)

Для обобщения формулы (7) на последний участок необходимо увеличить длину массива u до m+1.

После того, как выписаны все необходимые формулы, можно предложить следующий алгоритм вычислений:

- Описание массивов X (6) , N (7) , σ (6) , u (7) , P (6) .
- Описание функций $F(x)$, $q(x)$.
- Задание исходных данных (массивов X , P, значений k , m , l).
- Вычисление элементов массива N :σ

  внешний цикл по j от m до 1 с шагом -1

  $N_{j \cdot k} = N_{j \cdot k+1} + P_j$

  внутренний цикл по i от $j \cdot k + 1$ до $(j - 1) \cdot k + 1$ с шагом -1

$N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h / 2$

конец внутреннего цикла

конец внешнего цикла.

- Вычисление элементов массива σ по формулам (2) :

  цикл по i от 1 до m·k с шагом 1

- Вычисление элементов массива u :

  $u_1 = 0$

  внешний цикл по j от 1 до m с шагом 1

  внутренний цикл по i от (j -1)·k +2 до j·k с шагом 1

  $u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h /(2E)$

  конец внутреннего цикла

  $u_{j\cdot k+1} = u_{j\cdot k}$

  конец внешнего цикла.

- Печать значений x_i , N_i , σ_i , u_i :

  цикл по i от 1 до 6 с шагом 1

В качестве альтернативного можно предложить следующий вариант решения задачи. Интеграл, входящий в формулу для усилий (1) , вычислить аналитически. Это позволяет выражение для вычислений напряжений оформить в программе как функцию. Перемещения при этом можно вычислять не по формуле трапеций по трем точкам на участке (как в предыдущей программе), а используя более точный метод (например, стандартную программу метода Гаусса QG8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

ЗАДАНИЕ для пружинно-массовой механической системы методом простых итераций вычислить высшую и низшую частоты и соответствующие формы колебаний системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ Пусть имеется механическая система, состоящая из n масс m_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), соединенных между собой и основанием пружинами жесткостью c_k . На рисунке 1 показана одна из таких систем для $n = 3$. Массы могут двигаться только вертикально, без поворотов. В этом случае число степеней свободы и, соответственно, число обобщенных координат, необходимых для описания положения системы равно n . Выберем в качестве обобщенных координат смещения x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) сосредоточенных масс m_j от положения равновесия.

Уравнения свободных колебаний системы около положения равновесия можно

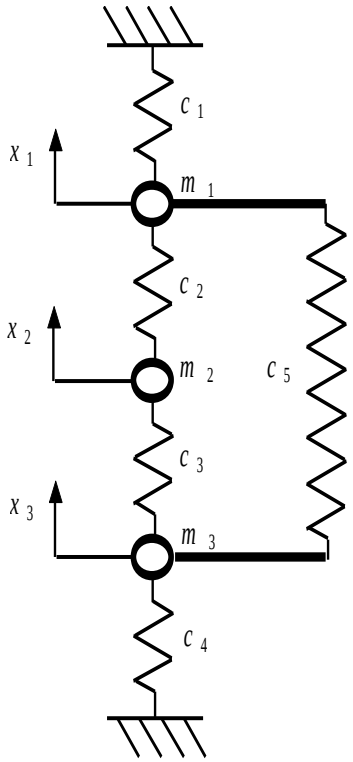


Рис. 1.

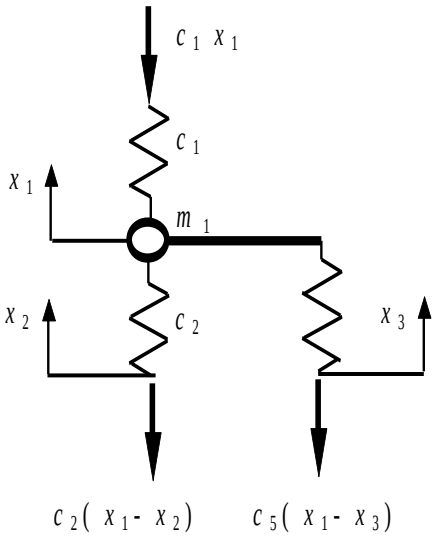


Рис. 2.

получить, используя II-й закон Ньютона.

Запишем уравнения II-й закона Ньютона для каждой массы

$$m_j \ddot{x}_j = F_j, \qquad (j = 1,2,\ldots,n), \qquad \ddot{x}_j = \frac{d^2 x_j}{d\ t^2}.$$

Восстанавливающие силы F_j , вычисляются как суммы сил, действующие на j-ю массу со стороны пружин, соединенных с ней, при отклонении массы от положения равновесия,. Усилие в каждой пружине численно равно произведению жесткости пружины (c_j) на ее удлинение (разности смещений концов пружины).

Так, на массу m_1 системы (рис. 1) действуют три силы (рис. 2): со стороны верхней пружины - $c_i\ x_1$ (знак «минус» показывает, что сила действует в противоположную сторону от направления x_1), со стороны левой нижней пружины - c_2 (x_1 - x_2) (здесь (x_1 - x_2) - удлинение

пружины), со стороны правой нижней пружины - c_5 (x_1 - x_3). Тогда уравнение движения для m_1 имеет вид

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 - c_2(x_1 - x_2) - c_5(x_1 - x_3)$$

Аналогично можно получить уравнения движения для всех масс. В итоге имеем систему уравнений движения

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 - c_2(x_1 - x_2) - c_5(x_1 - x_3) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) - c_3(x_2 - x_3) \\ m_3\ddot{x}_3 &= -c_4x_3 - c_3(x_3 - x_2) - c_5(x_3 - x_1) \end{aligned} \qquad (1)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1) разыскивается в виде

$$x_k = X_k e^{i\omega t}, \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

где: X_k -амплитуда колебаний k-ой массы, ω - круговая частота.

Подставляя функции (2) в уравнения (1) , и сокращая на $e^{i\omega t}$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} m_1\omega^2 X_1 &= c_1X_1 + c_2(X_1 - X_2) + c_5(X_1 - X_3) \\ m_2\omega^2 X_2 &= c_2(X_2 - X_1) + c_3(X_2 - X_3) \\ m_3\omega^2 X_3 &= c_4X_3 + c_3(X_3 - X_2) + c_5(X_3 - X_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

Вводя обозначения $\lambda = c_1 / m_1\omega^2$, представим систему (1) следующим образом

$$X_1 = \lambda\left[\left(1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}\right)X_1 - \frac{c_2}{c_1}X_2 - \frac{c_5}{c_1}X_3\right]$$

$$X_2 = \lambda\left[-\frac{c_2}{c_1}\frac{m_1}{m_2}X_1 + \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}\right)\frac{m_1}{m_2}X_2 - \frac{c_3}{c_1}\frac{m_1}{m_2}X_3\right]$$

$$X_3 = \lambda\left[-\frac{c_5}{c_1}\frac{m_1}{m_3}X_1 - \frac{c_3}{c_1}\frac{m_1}{m_3}X_2 + \left(\frac{c_3}{c_1} + \frac{c_4}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}\right)\frac{m_1}{m_3}X_3\right]$$

или в матричном виде

$$\{X\} = \lambda[H]\{X\} \qquad (3)$$

где $\{X\}^T = \{X_1, X_2, X_3\}$, а элементы матрицы $[H]$ вычисляются по формулам:

$$H_{11} = 1 + \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_5}{c_1}, \quad H_{12} = -\frac{c_2}{c_1}, \quad H_{13} = -\frac{c_5}{c_1},$$

$$H_{21} = -\frac{c_2}{c_1}\frac{m_1}{m_2}, \quad H_{22} = \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_3}{c_1}\right)\frac{m_1}{m_2}, \quad \text{и т.д.}$$

Для определения минимального собственного значения λ и соответствующего ему собственного вектора $\{X\}$ системы (3) можно воспользоваться несколькими методами, в частности, методом простых итераций, который заключается в следующем.

Выбирается некоторое начальное приближение для собственного вектора

$\{X\}^{(0)T} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, X_3^{(0)}\}$

по формуле

$$\{X\}^{(1)} = [H]\{X\}^{(0)}$$

или в общем случае

$$\{X\}^{(i+1)} = [H]\{X\}^{(i)}$$

На каждом шаге итераций определяются $\lambda_k^{(i+1)} = X_k^{(i)} / X_k^{(i+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, С ростом числа итераций $\lambda_k^{(i+1)}$ сходятся к минимальному собственному значению λ системы (3) . При достижении определенной точности в вычислении λ процесс итерации прекращается.

В процессе итераций абсолютные значения компонент вектора{ X } растут, поэтому при численных расчетах после каждого шага итераций необходимо выполнять нормирование{ X }, например, по значению максимального модуля его элементов.

ЗАДАНИЕ. Для своего варианта

1. Получить систему дифференциальных уравнений движения в виде (1).
2. Записать систему однородных алгебраических уравнений в виде (2), (3). Выписать выражения для определения элементов матрицы [H].
3. Составить подпрограмму, в которой методом простых итераций вычисляются минимальные значения λ и соответствующий собственный вектор{ X } для системы (3).
4. Составить головную программу для вычислений min λ (для матрицы [H]) и max λ (для матрицы $[H]^{-1}$).

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

1. Составить подпрограмму. в которой вычисляются компоненты матрицы [H].
2. Составить головную программу, в которой:
   - вводятся исходные данные ($\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \ldots, \frac{m_1}{m_2}, \ldots$)
   - вызывается подпрограмма вычисления [H]
   - вызывается подпрограмма метода простых итераций
   - выводятся результаты (λ , { X }, число итераций)

Данные из головной программы в подпрограмму вычисления [H] можно передавать либо через список формальных параметров, либо через общие области, используя оператор COMMON.

Подпрограмму метода простых итераций можно организовать следующим образом.

Формальные параметры H, X, Y, Z, AL, N, E ,m, mmax, IER где:

входные параметры: H (N, N) - матрица системы (3), N - порядок системы, E - точность вычислений; mmax - максимальное число итераций;

выходные параметры: AL - значение λ_{min} системы (3), X(N) - соответствующий λ_{min} собственный вектор; m - число выполненных итераций; IER - код ошибки (IER = 0 - процесс сошелся, в противном случае IER=1).

массивы: Y(N), Z(N) - вспомогательные массивы для хранения результатов промежуточных вычислений.

Алгоритм подпрограммы

a) описание используемых массивов
b) задание начальных значений X
c) вычисление последующих приближений Y=H·X
d) вычисление значений $Z_i = X_i / Y_i$, i = 1,..., n
e) найти среднеквадратичную ошибку

$$E1 = \left| \frac{1}{|z_n|} \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (z_i - z_n)^2 \right]^{1/2} \right|$$

f) найти максимальный модуль элемента Y
   S = max($|Y_1|, |Y_2|, \ldots, |Y_n|$)

g) вычислить начальное приближение для следующего шага итераций
   $X_i = Y_i / S$, i = 1, n
h) выполнить проверку на прекращение итераций:
   если $E1 - E > 0$, перейти на пункт c)
i) выполнить проверку на прекращение итераций по mmax:
   если m= mmax , выйти из подпрограммы с кодом ошибки IER=1
j) запомнить вычисленное значение λ (последнее значение Z_1)
   $AL = Z_1$
k) вернуться в вызывающую программу.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ. Исходная расчетная схема представляет собой цепочку из 5-ти масс и 6-ти жесткостей. В зависимости от варианта, одна из пружин может иметь нулевую жесткость (не учитывается при выводе уравнений движения),а некоторые массы могут быть соединены между собой или с основанием дополнительной "параллельной" жесткостью. В таблице 1 приведены номер нулевой жесткости и точки, соединенные "параллельной" жесткостью. В таблице 2 в зависимости от последней цифры кода группы заданны значения отношений масс и нулевых жесткостей.

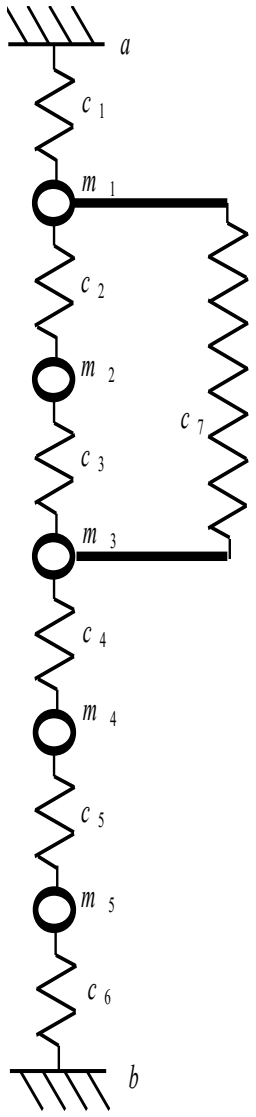


Рис. 3.

Таблица 1. Варианты расчетных схем.

№ вар.	Нулевые жесткости	Парал-ые жесткости	№ вар.	Нулевые жесткости	Парал-ые жесткости
1	2	4	1	2	4
1	1	—	16	—	4-b
2	1	1-3	17	—	a-3
3	1	2-4	18	—	1-4
4	1	3-5	19	—	2-5
5	1	4-b	20	—	1-5
6	1	1-4	21	2	1-3
7	1	2-5	22	3	2-4
8	1	3-b	23	4	3-5
9	1	1-5	24	3	1-4
10	1	2-b	25	3	1-5
11	—	—	26	1	2-4
12	—	1-3	27	1	1-3
13	—	2-4	28	1	2-4
14	—	3-5	29	1	2-5
15	—	a-2	30	1	2-5

Таблица 2. Варианты жесткостей и масс.

№	Жесткости c_i / c						Массы m_i / m				
вар.	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
1	1.0	2.0	0.8	1.2	0.9	1.5	1.0	0.5	1.2	2.0	0.8
2	1.0	1.5	0.5	2.0	2.0	1.0	1.0	1.0	2.0	3.0	0.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ.

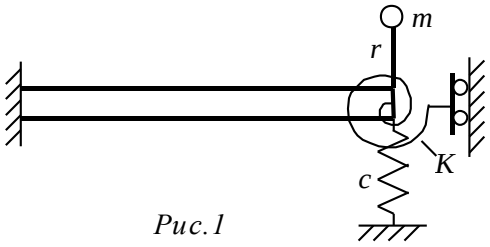


Рис.1

Обозначения:

Y(x) - прогиб оси балки;

EJ - жесткость балки на изгиб;

l - длина балки;

ρF - погонная масса;

m - сосредоточенная масса;

r - длина жесткого рычага - расстояние между осью балки и массой *m*;

c - линейная жесткость упругой опоры;

K - угловая жесткость упругой опоры;

$z = x/l$ - безразмерная координата ($0 \le z \le 1$).

При решении задач на определение собственных форм колебаний упругих балок функцию прогиба удобно записывать через функции Крылова S(*x*), T(*x*), U(*x*), V(*x*), которые представляют собой линейные комбинации гиперболических и тригонометрических синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} &S(x) = [ch(x) + \cos(x)] / 2, \quad T(x) = [sh(x) + \sin(x)] / 2 \\ &U(x) = [ch(x) - \cos(x)] / 2, \quad V(x) = [sh(x) - \sin(x)] / 2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Собственные формы *Y*(*z*) колебаний консольной балки (рис.1) через функции Крылова определяются как

$$Y(z) = U(\alpha z) + DV(\alpha z) \qquad (2)$$

Параметры α и *D* зависят от граничных условий на правом конце балки. Собственные значения α (безразмерные собственные частоты) определяются из следующего характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} V(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) U(\alpha) & S(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) V(\alpha) \\ S(\alpha) - \left(w\alpha^3 - \frac{q}{\alpha} \right) T(\alpha) & T(\alpha) - \left(w\alpha^3 - \frac{q}{\alpha} \right) U(\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

где *f,g,w,q*-безразмерные параметры: $f = m/\rho Fl$, $g = cl^3/EJ$, $w = f(r/l)^2$, $q = Kl/EJ$.

Уравнение (3) имеет бесчисленное множество положительных корней α, i =1,2,3, ... Для каждого значения а коэффициент *D* определяется из уравнения

$$V(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) U(\alpha) + D\left[S(\alpha) + \left(f\alpha - \frac{g}{\alpha^3} \right) V(\alpha) \right] = 0 \qquad (4)$$

Каждой паре значений α и D соответствует своя собственная форма Y(z), которая определяется с точностью до множителя. Собственные формы можно пронормировать, например, так, чтобы максимальное значение нормированной формы было равно единице. Тогда для нормированной формы можно записать следующее выражения

$$Y(z) = Y(z)/B = [U(\alpha z) + DV(\alpha z)] / B \quad (5)$$

$$B = \max|Y(z)| \quad (6)$$

Точкой α , в которой функция $Y(z)$ принимает максимальное по модулю значение B, может быть либо экстремум функции, либо точка z =1. В первом случае для определения z необходимо найти корни уравнения $Y'(z)=0$, или в развернутом виде

$$T(\alpha z) + DU(\alpha z) = 0 \quad (7)$$

Так как корней на отрезке 0 < z < 1 может быть несколько (в вариантах задания - не более трех), то необходимо найти все. Затем из найденных точек и точки z = 1 выбрать в качестве z ту, в которой $|Y(z)|$ принимает максимальное значение.

Можно использовать и другой способ нормирования, при котором коэффициент B вычисляется по формуле

$$B = \int_0^1 [Y(z)]^2 dz \quad (8)$$

Если собственная форма имеет узлы (точки, где функция $Y(z)$ меняет знак), то интеграл от 0 до 1 надо вычислять как сумму интегралов по участкам между узлами. Поэтому сначала необходимо найти эти узлы, т.е. корни уравнения (2). В зависимости от варианта задания на отрезке от 0 до 1 их может быть не более двух.

ЗАДАНИЕ. Для своего варианта исходных данных вычислить три первых собственных значения α из уравнения (3) и построить графики соответствующих собственных нормированных форм.

ВЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ. Переведите номер по групповому журналу из десятичной в двоичную систему исчисления. Запишите перед полученным числом нули так, чтобы получился пятизначный код. По двоичным значениям в каждой позиции кода определяются исходные данные (до 23-го варианта):

N позиции (слева направо)	1	2	3	4	5
Параметр	f	w	g	q	способ нормир.
0 в позиции	1	0	0	0	(6)
1 в позиции	0	1	1	1	(8)

РЕКОМЕНДАЦИИ к составлению программы. Для решения нелинейных уравнений можно использовать подпрограммы отделения корней и метода половинного деления (см. задачу 5), для численного интегрирования - подпрограмму метода Гаусса (см. задачу 6). Необходимо также составить подпрограммы-функции и (или) подпрограммы для вычисления: функций Крылова; функций (2),(3),(5),(7); подынтегральной функции в формуле (8); коэффициента B по формулам (6) либо (8).

В головной программе требуется описать массивы:

- A(3) -= для собственных значений α;
- D(3) - для коэффициентов *D*;
- Z0(3) - для точек экстремумов (или узлов);
- Y0(3) – для значений функции *Y* в точках экстремумов;
- B(3) - для коэффициентов *B* в формулах (6) или (8).

Алгоритм может быть построен по следующей схеме. В цикле по номеру формы (i=1,2,3) вычисляются:

- A(i) - собственное значение α;
- D(i) - коэффициент *D*;
- k значений Z0 и Y0 - точки экстремумов i-ой формы и значения функции *Y* в этих точках ($k \le 3$ - зависит от номера формы) или k значений координат узлов i-ой формы ($k \le 2$);
- B(i) - коэффициент *B* по формуле (6) или (8). Все результаты выводятся на печать.

После завершения цикла по i вычисляются при изменении *z* от 0 до 1 с шагом не более 0.1 и печатаются в таблицу ординаты трех собственных форм. При этом для записи и хранения текущих значений можно использовать массив Z0 или Y0.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН.

ВВЕДЕНИЕ. При выполнении расчетов с использованием методов ТФКП, теории упругости и т.д. в ФОРТРАН-программах могут быть использованы комплексные величины. Объектом комплексного типа в ФОРТРАНе могут быть константа, переменная, элемент массива, результат обращения к функции, значение выражения.

Данное комплексного типа представляется парой значений вещественного типа. Первая компонента пары представляет действительную часть, а вторая - мнимую часть комплексного данного. Комплексные константы определяются по форме записи - это пара вещественных констант, разделенных запятой и заключенных в скобки; первая вещественная константа задает действительную часть комплексного числа, вторая - мнимую.

Комплексные переменные, массивы, внешние функции должны быть описаны в операторе описания типа COMPLEX. Например, оператор COMPLEX ZZ, Z1(4,4) описывает комплексную величину ZZ (переменную либо функцию) и двумерный массив Z1 , состоящий из ·16 комплексных элементов.

В ФОРТРАНе имеются встроенные функции, предназначенные для работы с комплексными величинами (ниже в таблице Z - комплексная, а X и Y - вещественные величины):

Тип функции	Функция	Значение
комплексный	CMPLX(X,Y)	X+i·Y
----’’----	CONJG(Z)	X-i·Y
----’’----	CSIN(Z)	sin(Z)
----’’----	CCOS(Z)	cos(Z)
----’’----	CEXP(Z)	exp(Z)
----’’----	CSQRT(Z)	sqrt(|Z|)·exp(i·arg(Z)/2)
----’’----	CLOG(Z)	ln(|Z|) +i·arg(Z)
вещественный	REAL(Z)	Re(Z)
----’’----	AIMAG(Z)	Im(Z)
----’’----	CABS(Z)	|Z|=sqrt(X^2+Y^2)
----’’----	ATAN2(Y,X)	arg(Z)=arctg(Y/X)

CSQRT(Z) $\sqrt{|Z|}\cdot\exp(i\cdot\arg(Z)/2)$ $-\pi \le \arg(Z) \le \pi$

CLOG(Z) вычисляет главное значение (k=0) функции
$\ln(Z) = \ln(|Z|)+i\cdot(\arg(Z)+2\cdot k\cdot\pi)$
Для вычисления других комплексных функций можно воспользоваться формулами:

$\operatorname{tg}(Z) = \sin(Z)/\cos(Z)$ $\operatorname{arctg}(Z) = (1/(2\cdot i))\cdot\ln((1+i\cdot Z)/(1-i\cdot Z))$
$\operatorname{ctg}(Z) = \cos(Z)/\sin(Z)$ $\operatorname{arcctg}(Z) = \pi/2-(1/(2\cdot i))\cdot\ln((1+i\cdot Z)/(1-i\cdot Z))$
$\operatorname{th}(Z) = \operatorname{sh}(Z)/\operatorname{ch}(Z)$ $\operatorname{arcth}(Z) = 0.5\cdot\ln((1+Z)/(1-Z))$
$\operatorname{cth}(Z) = \operatorname{ch}(Z)/\operatorname{sh}(Z)$ $\operatorname{arccth}(Z) = 0.5\cdot\ln((Z+1)/(Z-1))$
$\operatorname{sh}(Z) = 0.5\cdot(\exp(Z)-\exp(-Z))$ $\operatorname{arcsh}(Z) = \ln(Z \pm (Z^2+1)^{0.5})$
$\operatorname{ch}(Z) = 0.5\cdot(\exp(Z)+\exp(-Z))$ $\operatorname{arcch}(Z) = \ln(Z \pm (Z^2-1)^{0.5})$
$\arcsin(Z) = \pi/2-i\cdot\ln(Z+(Z^2-1)^{0.5})$ $\arccos(Z) = i\cdot\ln(Z \pm (Z^2-1)^{0.5})$

Для функций, при вычислении которых используется CLOG(Z), определяются их главные значения.

В арифметическом выражении совместно с комплексными операндами могут быть использованы величины любого типа. При вычислении выражений со смешением типов

применяются правила преобразования типов. Так, при выполнении арифметической операции между операндами, один из которых является комплексным, результат будет также комплексным. Запрещены арифметические операции между комплексными величинами и вещественными удвоенной точности. При выполнении оператора присваивания тип вычисленного значения в правой части оператора преобразуется к типу переменной в левой части.

При вводе-выводе комплексных данных необходимо задавать формат как для действительной части, так и для мнимой.

ЗАДАНИЕ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ. Для восьми значений комплексной переменной Z вычислить комплексные функции:

1) Z, |Z|, agr(Z), Re(Z), Im(Z), sin(Z), cos(Z), exp(Z), sqrt(Z), ln(Z) - для всех вариантов;

2) f1, f2, f3, f4 в соответствии с номером варианта из таблицы:

n	f1	f2	f3	f4
1	$Z^{2\cdot i}$	tg(Z) / th(1+i)	arctg((2- 0.5·i)·Z)	cos(-2·i) · ch(Z)
2	$Z^{1/3}$	ctg(i) / cth(Z)	arcctg((0.1+ i)·Z)	sin(0.1·i) · sh(Z)
3	$(2+i)^{Z}$	th(Z) / tg(3- i)	arcsin((-1- i)·Z)	(2-i) · sh(i·Z)
4	$(i\cdot Z)^{1/4}$	(3-0.4·i)· th(Z)	arccos(0.1-0.3·i·Z)	ch((0.2-i)-2·Z)
5	$(1+Z)^{2\cdot i}$	cth(0.5·i · (Z+i))	arcth(Z / (2- i))	sh((1- i)·(Z+1))
6	$(2\cdot i+Z)^{1/Z}$	th(Z) / th(-i)	arccth(i / Z)	ch(Z+i) / sin(i)
7	$Z^{i/2}$	ctg(Z / (2+0.1·i))	arcsh(i + i / Z)	sh(i -Z)·cos(i)
8	$(1+Z)^{1/2}$	tg(Z / (1+Z))	arcch(Z / (1+ i))	sh(Z)·ch(1+Z)
9	$(i+Z)^{1/2}$	th((2-i) · Z)	arctg((2- i)·Z)	sh(Z/(1-i))
10	Z^{1+i}	th(Z / (3+ i))	arcctg(Z·(1-2·i))	ch(Z·(Z+1))
11	$(2\cdot i+Z)^{0.5}$	th(1+i) / tg(Z)	arcsin((Z+ i) / Z)	cos(i)·ch(Z)
12	$(1-i)^{Z+1}$	cth(Z) / ctg(i)	arccos(Z / (Z - i))	sh(i)·cos(Z)
13	2^{1+i+Z}	th(i-Z) / ctg(i)	arcth(Z^2 +1)	sh(i)·sin(Z)
14	$(Z+1)^{Z-i}$	cth(2·i) / tg(i·Z)	arccth(Z+Z / i)	cos(Z+1)/ch(Z)
15	$(-1+i)^{Z}$	ctg(1- i)·th(Z)	arcsh(Z / (Z+2))	sin(2-i)·ch(Z)
16	Z^{-1-i}	th(Z+1) / th(Z+ i)	arcch((1- i) / Z)	cos(2-i)·ch(Z)

Значения комплексной переменной Z_k вычислить в соответствии с номером n варианта:
Z_1 = n; Z_2 = 1+ i·n; Z_3 = i·n; Z 4= - n+i; Z_5 = - n; Z_6 = - n /3-i·2·n /6; Z_7 = -i·n; Z_8 = 2·n /3-i· 4·n /5

ЗАДАНИЕ 2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. Для области D в плоскости Z построить отображенную функцией W= f(Z) область D* в плоскости W. Для этого:

1. записать уравнения, описывающие границы области D;
2. выбрать (вычислить) на границах области D не менее 20 точек Zк таким образом, чтобы при их обходе область оставалась всегда слева;
3. вычислить точки Wк = f(Zк) области D*;
4. по найденным точкам на миллиметровке построить области D и D*.

Варианты заданий.

N	D	W
1	|Z| < 1	(Z+2)/(Z+i)
2	-π/2 < Re(Z) < π/2	tg(Z)
3	|Z| > 3	(Z+1/Z)/2
4	-π/4 < Im(Z) < π/4	th(Z)

5	$\|Z\| < 0.5$	$(Z+1/Z)/2$
6	$0 < \|Z\| < 1,\ 0 < \arg(Z) < \pi/3$	$(Z+1/Z)$
7	$\|Z-1\| < 1$	$1/Z$
8	$\|Z\| > 1,\ 0 < \arg(Z) < \pi/2$	$i\cdot\ln(Z)$
9	$\|Z-2\| > 2$	$1/(Z-1)$
10	$0 < \mathrm{Im}(Z) < 2\pi,\ \mathrm{Re}(Z) < 0$	$i\cdot\exp(Z)$
11	$0 < \mathrm{Im}(Z) < \pi$	ch(Z)
12	$0 < \mathrm{Re}(Z) < \pi/2,\ 0 < \mathrm{Im}(Z) < 1$	$\exp(2i\cdot Z)$
13	$0 < \mathrm{Re}(Z) < \pi/4$	ctg(Z)
14	$-\pi < \mathrm{Re}(Z) < \pi,\ \mathrm{Im}(Z) > 0$	sin(Z)
15	$-\pi < \mathrm{Im}(Z) < \pi$	$Z+\exp(Z)$
16	$\mathrm{Re}(Z) > 0,\ -1 < \mathrm{Im}(Z) < 0$	ch(Z)